

## MES RENCONTRES AVEC JACQUES

### Entretien d'Alain Connes avec Jacques Dixmier

Alain Connes – Je vais essayer de raconter ma première rencontre avec Jacques, y a eu une suite de circonstances favorables, la première c'est que j'avais été invité en 71 à Seattle pour une conférence, et en fait, j'avais acheté, au hasard un *Lecture Notes* quand j'étais passé par Princeton, c'était un mathématicien japonais, Takesaki, qui exposait le travail d'un autre mathématicien japonais, qui est Tomita. Et j'avais été fasciné, sans vraiment comprendre, pendant tout le voyage en train qu'on faisait à travers le Canada, euh, parce que ça me paraissait extrêmement intéressant. Et quand j'étais arrivé à la conférence, que j'avais vu qu'il y avait le Japonais juste avant qui expliquait la théorie, j'avais trouvé ça formidable, et donc j'avais décidé, en voyant ce hasard, de n'aller écouter que ce cours et de travailler complètement là-dessus. Et quand je suis rentré de ce voyage aux États-Unis, donc, j'étais jeune marié, avec Danye, j'ai décidé...

### Le séminaire de Dixmier

...d'aller au séminaire de Jacques Dixmier, qui était à Paris, qui avait pour sujet les algèbres d'opérateurs et y a eu un concours de circonstances extraordinaire qui a fait que, à nouveau au hasard, parmi les articles que Jacques proposait d'exposer au séminaire, j'en ai choisi un, et quand je suis rentré en banlieue en train, en lisant cet article, je me suis rendu compte qu'en fait il y avait un lien formidable entre les deux théories. À ce moment-là, j'ai envoyé une petite lettre d'une page à Jacques, il m'a répondu presque tout de suite en me disant : « Je comprends pas, c'est trop court, il faut beaucoup plus de détails », je lui ai réécrit, deux jours après, en lui envoyant une lettre de quatre pages, et c'est là que notre entente a commencé, il m'a reçu dans son bureau, et je me souviens très, très bien qu'il m'a dit un seul mot, il m'a dit : « Foncez ! »

Jacques Dixmier – La deuxième rédaction qu'il m'a envoyée et qui était détaillée, je me souviens qu'il obtenait des résultats qui étaient nouveaux, visiblement importants, et inattendus, j'ai été ahuri de voir ça démontré en quatre pages, quoi... C'est pour ça que j'ai dû lui dire « Foncez ! » Et puis alors, bon, les quatre pages sont devenues quand même les cent et quelques pages de ta thèse...

## La trace de Dixmier

AC – Y a un autre épisode où on a vraiment renoué ensemble, c'était à l'IHÉS ! Jacques avait fait dans les années 50 une découverte, il avait trouvé une trace exotique sur les opérateurs...

JD – Euh, on parlait, je crois, des algèbres hilbertiennes, et je t'ai dit, « je m'étonne que cet exemple que j'ai fabriqué n'ait pas servi à faire des contre-exemples »... Parce que, ce que j'avais trouvé, tu dis exotique, pour moi c'était une monstruosité mathématique ! Et une monstruosité mathématique, souvent ça ressort à faire d'autres monstres ! Je me souviens encore Alain disant, « mais c'est exactement c'qu'y m'faut ! »

AC – Oui, alors en fait, maintenant ça s'appelle la trace de Dixmier, mais il se fait que dans les bons cas, cet objet converge, c'est-à-dire que normalement, c'est un objet qui est exotique ou monstrueux parce que y a une quantité qui n'a pas de limite, mais en fait dans les bons cas, la quantité en question a une limite ! C'est une espèce de mesurabilité... Et alors y a un phénomène extraordinaire qui se produit, c'est qu'en fait pratiquement toutes les intégrales qu'on connaît, en mathématiques, sont un cas particulier de cette construction...

JD – Oh là, t'exagères, quand même...

AC – Ah, j'exagère pas ! J'exagère pas, c'est-à-dire que, d'habitude en mathématiques, quand on écrit  $\int f(x)dx$ , le signe d'intégrale est indissociable de ce qu'on appelle la mesure, c'est-à-dire ce qu'on appelle  $d\mu(x)$ . Y a pas un sens à l'intégrale et un sens séparé pour  $d\mu(x)$ ... C'est l'ensemble, c'est le package, qui a un sens... Eh bien, grâce à ce procédé, on peut donner un sens à l'intégrale, on peut donner un sens aux infinitésimaux, etc., etc., et à ce moment-là on peut dissocier l'intégrale de l'autre côté. Alors il y a un autre intérêt, c'est qu'en fait les physiciens se sont aperçus que dans leurs travaux, y a beaucoup de, ce qu'on appelle de divergences et en particulier ce qu'on appelle les divergences logarithmiques. Et ce qu'a fait Jacques, quand il a défini sa trace, il a montré que le coefficient d'une divergence logarithmique, ça définit une trace, ça a permis de donner un statut mathématique à quelque chose qui normalement n'aurait pas de statut mathématique, qui sont précisément ces divergences logarithmiques...

JD – Ah, si Leibniz y savait ça ! Ah, là là !

AC – Oui, mais justement, là, y a une différence extrêmement forte et frappante entre Leibniz et Newton ! Ce que la trace de Dixmier permet de faire et ce que le formalisme quantique permettent de faire, c'est beaucoup plus quelque chose qui va dans le sens de Newton que dans le sens de Leibniz, c'est-à-dire que Newton avait l'idée que les quantités infinitésimales, ce ne sont pas des nombres, ce sont des variables... Or, en mathématiques, on

s'aperçoit que la bonne formulation de la notion de variable réelle, la seule qui permette la coexistence entre les variables continues et les variables discrètes, c'est le formalisme quantique, c'est-à-dire que les variables réelles, ce sont des opérateurs auto-adjoints dans l'espace de Hilbert, et les opérateurs auto-adjoints y peuvent avoir un spectre continu mais y peuvent aussi avoir un spectre discret, et tout ça, ça agit dans le même espace de Hilbert... Et alors ce qui est formidable, c'est que quand on lit le détail de la définition de Newton, de ce qu'il appelle les variables infinitésimales, on tombe exactement sur ce qu'on appelle les opérateurs compacts... Non seulement on tombe sur les opérateurs compacts, mais on tombe aussi sur le fait que un infinitésimal peut avoir un ordre 1, un ordre  $\alpha$  où  $\alpha$  est un nombre réel, donc y a toute une hiérarchie d'infinitésimaux, et précisément la trace que Jacques avait construite, c'est une trace qui intègre les infinitésimaux d'ordre 1, et qui donne un résultat nul pour tous les infinitésimaux d'ordre plus élevé que 1... Donc sa trace c'est une espèce de filtre, qui va filtrer tous les détails quantiques, d'une certaine manière, et qui va donner une image classique d'un résultat... Et ça, ça a joué, dans les développements qu'on a faits ensuite, un rôle absolument essentiel !

JD – On, c'est pas moi, hein !

AC – Mais, donc, ce que je veux dire, c'est que, on a eu cette nouvelle rencontre, qui s'est faite aux déjeuners de l'IHÉS, par hasard ...

### **Le boson de Dixmier**

AC – Et alors l'épisode relativement récent, c'est, il y a peut-être cinq ou six ans, on était à la campagne avec Danye, et on reçoit une petite carte postale, que Jacques nous avait envoyée : Voilà, j'ai le titre d'un livre... Alors c'était : Bossons sur le boson... Et alors y dit, vous l'écrivez, je corrigerai les épreuves !

JD – Ah, y faut dire que c'était dans un contexte où on parlait beaucoup de découverte du boson de Higgs, qui était pas encore trouvé...

AC - Au même moment, j'avais eu vent, par Étienne Klein, d'une anagramme qui était assez étonnante, qui s'intéressait précisément au boson de Higgs... Cette anagramme c'était le boson scalaire de Higgs, et de l'autre côté c'était l'horloge des anges ici-bas... Voilà...Et si on passe au commutatif, c'est-à-dire si on ignore l'ordre des lettres, on obtient exactement la même chose... Alors, on avait trouvé une horloge ornée d'anges, comme y en avait au début du XXe siècle, on fait une belle image, et puis on avait répondu à Jacques... Bien sûr pour le moment c'était encore une boutade, et puis on a commencé à communiquer énormément avec Jacques, et puis le bouquin a pris forme ! Et dans lequel au bout d'un moment on a rajouté de plus en plus de détails scientifiques, mais qui a existé comme ça, presque, bon, je dirais pas sans efforts...

JD – Pour ce qui est des efforts, là je peux dire que je ne suis plus capable d’inventer des mathématiques et je trouve que c’est infiniment plus facile d’écrire un roman que d’écrire un article de maths !

### **Les matroïdes de Dixmier**

AC – Mais y a aussi un épisode récent, et qui était que je suis arrivé une après-midi chez Jacques et je lui ai montré la note au compte-rendu qu’on avait écrite avec Katia Consani sur ce qu’on appelle le site arithmétique. Jacques a lu cette note avec attention et...

JD – Sans y comprendre grand-chose !

AC – Oh, oh, oh... Oui, sauf qu’il a compris quelque chose d’extraordinaire, il a compris que c’était relié à un travail qu’il avait fait dans les années 60, Jacques avait classifié les matroïdes et il s’est aperçu en lisant notre compte-rendu, que l’espace qui classifiait les matroïdes était le même que l’espace des points du topos qu’on obtenait... Mais en regardant de plus près, on s’est aperçu qu’en fait, le topos en question, c’était un topos qui était sous-jacent à toute la géométrie non-commutative, et la raison c’est que, en géométrie non-commutative, le point est représenté par l’algèbre des opérateurs compacts, cette algèbre elle a des endomorphismes et ces endomorphismes définissent exactement le topos qu’on avait eu... Quand on regarde cette algèbre comme un faisceau sur le topos, le faisceau a des fibres, sur chacun des points, et on obtient exactement les algèbres que Dixmier avait classifiées... Au niveau conceptuel, ça a montré que le topos qu’on avait trouvé, c’était simplement le point en géométrie non-commutative... Et ça, alors c’est extrêmement satisfaisant et c’est venu du fait que Jacques a lu notre note en grand détail et a fait la connexion avec le travail qu’il avait fait des années auparavant.

**Paris-Shanghai, 1<sup>er</sup> avril 2017**

**09min 50sec**