

TROIS THÉORÈMES IMPOSSIBLES

Cédric Villani – Dans le monde où nous vivons, il y a des choses bien étranges, dans le monde mathématique aussi, des choses impossibles, même, parfois on les enseigne et on en tire des conclusions. L'énoncé réputé le plus surprenant de toute la mathématique est le paradoxe de Banach-Tarski : je prends une boule, il existe alors un découpage de cette petite boule en un nombre fini de morceaux tels que si l'on déplace et recolle les morceaux différemment, on reconstitue le buste de Poincaré ; ou la statue d'un éléphant grandeur nature ! Et évidemment, ça pose problème ! Ça serait bien pratique si on pouvait faire ça avec une boule en or massif... Et bien sûr, ces morceaux sont en pratique impossibles à constituer... Sauf à faire appel au puissant et controversé axiome du choix ! J'ai enseigné ce paradoxe à mes étudiants, à l'École normale supérieure de Lyon, pour les mettre en garde contre cet axiome du choix !

Un autre énoncé impossible est le théorème de Nash-Kuiper. Lui n'utilise pas l'axiome du choix, mais il est tout aussi paradoxal. Supposons que ma boule, maintenant, je souhaite la ranger dans une toute petite boîte d'allumettes ! Eh bien, je peux, nous dit Nash, je peux la replier sur elle-même de sorte à la ranger dans la boîte d'allumettes, sans pour autant la cabosser, sans changer sa géométrie ! Une minuscule fourmi à la surface de la boule ne se rendrait même pas compte du changement ! Ceci est choquant ! Nous avons l'habitude de penser qu'une sphère est rigide du fait de sa courbure ! Ce théorème impossible, bien sûr, je l'ai aussi passé en revue avec des étudiants et nous l'avons re-démontré... Il nous enseigne que les apparences sont trompeuses et que la rigidité est un concept subtil, qui dépend de la régularité ! Et puis, c'est une construction magnifique, que l'on peut d'ailleurs visualiser, et qui est d'une très grande beauté plastique.

Le troisième énoncé que j'évoquerai, c'est celui que j'ai exposé dans un séminaire Bourbaki, découvert en 1993 par l'imprévisible chercheur Vladimir Scheffer. Imaginez une douce après-midi d'été, un lac paisible, pas un souffle de vent, et soudain l'eau se met à bouillonner et s'agiter en tous sens... Et puis d'un coup tout s'arrête ! Toujours pas un souffle de vent ! C'est comme si l'énergie avait été générée de nulle part avant de retourner dans le néant ! C'est le sens du théorème de Scheffer. Il construit, avec la bonne vieille équation d'Euler, 1755, il construit un fluide qui viole la loi de la conservation de l'énergie. On ne sait pas vraiment quelle est la bonne réponse, la bonne attitude face au paradoxe de Scheffer. On ne sait pas dans ce cas si l'on a des solutions lisses ou non-lisses, et si c'est là que réside la solution. Qu'en tirer ? Pour l'instant en tous cas, on peut en conclure qu'on comprend vraiment bien peu de

choses à la mécanique des fluides et à beaucoup d'objets familiers qui nous entourent !

3min 09sec